2 RS 46114

THREE YEAR B.A./B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL/MAY 2024.

FOURTH SEMESTER

Mathematics

Paper IV – REAL ANALYSIS

(w.e.f. 2020-21 Admitted Batch)

Time : Three hours | Maximum : 75 marks

(No additional sheet will be supplied)

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE of the following questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. Test for convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right)$.

   $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right)$ యొక్క అభిసరణతను పరిక్షించండి.

2. Test the convergence of $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.5}+\frac{1.3.5}{2.5.8}+\ldots$.

   $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.5}+\frac{1.3.5}{2.5.8}+\ldots$ యొక్క అభిసరణతను పరిక్షించండి.

3. If $f:R\to R$ defined by $f(x)=x \; if \; x\in R-Q$ and $f(x)=-x \; if \; x\in Q$ is continous only at '0'.

   $f:R\to R$ గా నిర్వచించనట్లయితే $f(x)=x; x\in R-Q$ మరియు $f(x)=-x; x\in Q$; $x=0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

4. Discuss the continuity of the function $f(x)=\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$ at origin.

   $f(x)=\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$; $x\neq 0$ మరియు $f(0)=0$ యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

5. Show that $f(x)=x\tan^{-1}\frac{1}{x}$, if $x\neq 0$ and $f(0)=0$ is not derivable at $x=0$.

   $x=0$ వద్ద $f(x)=x\tan^{-1}\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ అయితే $f(0)=0$ అయినచో అవకలనీయము కాదని చూపండి.

6. Using Lagrange's theorem, show that $x>\log(1+x)>\frac{x}{1+x}$ if $f(x)=\log(1+x)\,\forall x>0$.

   $\forall x>0$ మరియు $f(x)=\log(1+x)$ అయినప్పుడు లాగ్రాంజ్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి $x>\log(1+x)>\frac{x}{1+x}$ అనిచూపండి.

7. If $f(x)=2x-1$ on $[0,1]$ and $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$, then find $U(P,f)$ and $L(P,f)$.

$[0,1]$ పై $f(x)=2x-1$ మరియు $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$ అయితే, $U(P,f)$ మరియు $L(P,f)$ ని కనుగొనండి.

8. If $f:[a,b]\to R$ is continuous on $[a,b]$ then f is $R-$Integrable on $[a,b]$.

$f:[a,b]\to R$ అనేది $[a,b]$ పై అవిచ్ఛిన్నం అయితే f అనేది $[a,b]$ పై $R-$సమకలనీయము.

9. If $f\in R[a,b]$ then prove that $|f|\in R[a,b]$.

$f\in R[a,b]$ అయితే $|f|\in R[a,b]$ అని నిరూపించండి.

10. If $f\in R[a,b]$ then $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$.

$f\in R[a,b]$ అయితే $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

11. State and prove D'– Alembert's test.

D– అలెంబర్ట్స్ పరీక్షను నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

12. Test the Convergence of $\Sigma\frac{x^n}{x^n+a^n}(x>0,a>0)$.

$\Sigma\frac{x^n}{x^n+a^n}(x>0,a>0)$ యొక్క అభిసరణతను పరిక్షించండి.

13. Let $S=R-\{0\}\to R$ is defined as $f(x)=\frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}}$ then show that $\lim_{x\to 0}f(x)$ does not exist.

$S=R-\{0\}\to R$ ను $f(x)=\frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}}$ గా నిర్వచిస్తే $\lim_{x\to 0}f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.

Or

14. If f is continuous on $[a,b]$ then prove that f is bounded on $[a,b]$.

f అవిచ్ఛిన్నం అయితే $[a,b]$ మీద f పరిబద్ధము అని చూపండి.

15. Show that $f(x)=|x-1|+|x-2|$ is continuous but not derivable at $x=1$ and $x=2$.

$f(x)=|x-1|+|x-2|$ అయితే అవిచ్ఛిన్న మౌతుంది, కానీ $x=1$ మరియు $x=2$ వద్ద అవకలనము కాదని చూపండి.

Or

16. State and prove Cauchy's mean value theorem.

కోషి మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించండి.

17. If $f \in R[a,b]$ and m, M are the infimum and supremum of f on $[a,b]$ then $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

$f=[a, b] \to R$ మరియు $[a,b]$ లో గరిష్ఠ దిగువ హద్దు f, కనిష్ఠ ఎగువ హద్దు f లు m, M లు అయితే, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ అని నిరూపించండి.

Or

18. Show that $f(x)=3x+1$ is integrable on $[1,2]$ and $\int_1^2 (3x+1)dx = \frac{11}{2}$.

$[1,2]$ మీద $f(x)=3x+1$ సమాకలనము అయినప్పుడు $\int_1^2 (3x+1)dx = \frac{11}{2}$ అని చూపండి.

19. State and prove fundamental theorem of Integral Calculus.

సమాకలన ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి, నిరూపించండి.

Or

20. Prove that $\frac{\pi^3}{24} \leq \int_0^\pi \frac{x^2}{5+3\cos x} dx \leq \frac{\pi^3}{6}$.

$\frac{\pi^3}{24} \leq \int_0^\pi \frac{x^2}{5+3\cos x} dx \leq \frac{\pi^3}{6}$ అని చూపండి.